Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a IX-a

Problema 1

a) Arătați că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{2x-3}{6}\right] + \left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{2x+1}{6}\right] = \frac{3x+1}{5}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

Problema 2

Se consideră numărul real $a = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014}$ și șirul $(s_n)_{n \geq 1}$, $s_n = a^n + \frac{1}{a^n}$.

Să se demonstreze că:

a) $s_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
b) $s_{2n-1} \vdots 2026, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3

Se consideră patrulaterul $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O. Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB și cu M, N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD.

a) Arătați că segmentele DH_1, AH_2, BH_3, CH_4 au același mijloc.

b) Dacă P și Q sunt mijloacele segmentelor DH_1, respectiv MN, arătați că punctele O, P și Q sunt coliniare.

Supliment Gazeta Matematică nr.11/2025

Problema 4

Dacă a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, demonstrați că

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} > \frac{2}{3}$$

***Notă**: Timp de lucru: 3 ore.*
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 21 puncte.
Se acordă 16 puncte din oficiu.