

Olimpiada Națională de Matematică Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026

Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemă	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	<p>a) Notăm $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = \alpha \in [0, 1)$ partea fracționară a lui x. Analizăm cazurile $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ și $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$. Dacă $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, atunci $[x + \frac{1}{2}] = a$ și obținem $[x] + [x + \frac{1}{2}] = a + a = 2a = [2x]$. Dacă $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, atunci $[x + \frac{1}{2}] = a + 1$ și obținem $[x] + [x + \frac{1}{2}] = a + a + 1 = 2a + 1 = [2x]$ pentru că $2a + 1 \leq 2x < 2a + 2$.</p> <p>b) Ecuația poate fi scrisă sub forma</p> $\left[\frac{2x-3}{6} \right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{2}{3} \right] = \frac{3x+1}{5}$ <p>Aplicând identitatea lui Hermite pentru $n=3$ obținem</p> $\left[\frac{2x-3}{6} \right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{2x-3}{6} + \frac{2}{3} \right] = \left[3 \cdot \frac{2x-3}{6} \right]$ <p>Ecuația devine $\left[x - \frac{3}{2} \right] = \frac{3x+1}{5} \Rightarrow k \leq x - \frac{3}{2} < k + 1$ Notăm $\frac{3x+1}{5} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5k-1}{3}$ Obținem $k \leq \frac{5k-1}{3} - \frac{3}{2} < k + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{5k-1}{3} - k < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq 2k - 1 < \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{4} \leq k < \frac{17}{4}$ Cum $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{3, 4\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{14}{3}, \frac{19}{3} \right\}$ soluțiile ecuației.</p>	<p>1p</p> <p>4p</p> <p>2p</p> <p>3p</p> <p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>
2.	<p>a) Pentru $n = 1, s_1 = a + \frac{1}{a} = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014} + \frac{1}{1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014}}$ Dar $(1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014})(1013 - \sqrt{1012 \cdot 1014}) = 1013^2 - (1013 - 1)(1013 + 1) = 1$ Deci $s_1 = 1013 + \sqrt{1012 \cdot 1014} + 1013 - \sqrt{1012 \cdot 1014} = 2026 \in \mathbb{N}$. Presupunem că $s_k \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Din $s_n = a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{N}, s_1 = a + \frac{1}{a} = 2026 \in \mathbb{N} \Rightarrow s_n \cdot s_1 = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \left(a + \frac{1}{a}\right) \in \mathbb{N}$ Deci $2026s_n = a^{n+1} + a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} + \frac{1}{a^{n+1}} = s_{n+1} + s_{n-1} \in \mathbb{N}$ Cum $s_{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow s_{n+1} \in \mathbb{N}$ și finalizare</p> <p>b) Din a), $s_{n+1} = 2026s_n - s_{n-1}$, $s_1 = 2026 : 2026$, Dacă $s_{2k-1} : 2026$, atunci $s_{2k+1} = 2026s_{2k} - s_{2k-1}, k \in \mathbb{N}^*$ și finalizare</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>4p</p> <p>4p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>3p</p>

<p>3</p>	<p>a) Dacă P_1, P_2, P_3, P_4 sunt mijloacele segmentelor DH_1, AH_2, BH_3, CH_4, atunci</p> $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \text{ deci } \overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OH_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ $\text{Din } \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH_2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2} \Rightarrow P_1 = P_2$ $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_4} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$ <p>Finalizare: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, mijloc comun.</p> <p>b) Din a), $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, iar $\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}}{2}$, Q mijlocul lui MN</p> $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}, \text{ deci } \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OP}$ <p>Finalizare: punctele O, P, Q sunt coliniare</p>	<p>4p</p> <p>4p</p> <p>3p</p> <p>1p</p> <p>4p</p> <p>4p</p> <p>1p</p>
<p>4</p>	<p>Metoda 1. Aplicând inegalitatea lui Titu Andreescu obținem</p> $\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b}$ $= \frac{a^2}{2a^2+a \cdot b+a \cdot c} + \frac{b^2}{2b^2+b \cdot c+b \cdot a} + \frac{c^2}{2c^2+c \cdot a+c \cdot b}$ $\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c)}$ <p>Demonstrăm că</p> $\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c)} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(a+b+c)^2 > 4(a^2+b^2+c^2+a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c) \Leftrightarrow$ $2(a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c) > a^2+b^2+c^2,$ <p>inegalitate pe care o vom demonstra folosind inegalitățile din triunghi</p> $b+c > a \Rightarrow a \cdot b+a \cdot c > a^2$ $a+c > b \Rightarrow a \cdot b+b \cdot c > b^2$ $a+b > c \Rightarrow a \cdot c+b \cdot c > c^2$ <p>Prin însumarea ultimelor 3 inegalități obținem ceea ce rămăsese de demonstrat.</p> <p>Metoda 2 Folosind inegalitatea C-B-S obținem</p> $[a(2a+b+c) + b(2b+c+a) + c(2c+a+b)] \cdot \left(\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \right) \geq (a+b+c)^2$ <p>Pentru a obține inegalitatea cerută este suficient să demonstrăm</p> $(a+b+c)^2 > \frac{2}{3} \cdot [a(2a+b+c) + b(2b+c+a) + c(2c+a+b)]$ $\Leftrightarrow 2(a \cdot b+b \cdot c+c \cdot a) > a^2+b^2+c^2,$ <p>inegalitate pe care o vom demonstra folosind inegalitățile din triunghi</p> $b+c > a \Rightarrow a \cdot b+a \cdot c > a^2$ $a+c > b \Rightarrow a \cdot b+b \cdot c > b^2$ $a+b > c \Rightarrow a \cdot c+b \cdot c > c^2$ <p>Prin însumarea ultimelor 3 inegalități obținem ceea ce rămăsese de demonstrat.</p>	<p>3p</p> <p>6p</p> <p>3p</p> <p>4p</p> <p>3p</p> <p>2p</p> <p>9p</p> <p>3p</p> <p>4p</p> <p>3p</p> <p>2p</p>