

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026

Clasa a XI -a

Problema 1

Fie $a, b > 0$ cu $a + b = 1$ și $(x_n)_{n \geq 1}, (y_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale pozitive, pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = x$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^n = y$, unde $x, y > 0$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot x_n + b \cdot y_n)^n = x^a \cdot y^b$.

Problema 2

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se demonstreze că există șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot b_n + 3}{a_n \cdot c_n} \right)^n$.

Problema 3

Se consideră $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze L_1 .

b) Folosind eventual metoda inducției matematice,

să se determine termenul general al șirului $(L_n)_{n \geq 1}$.

c) Dacă $L_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{12}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^3}$.

Problema 4

Fie G o mulțime nevidă de permutări inclusă în S_4 cu proprietățile:

1) dacă $\sigma, \tau \in G$, atunci $\sigma \cdot \tau \in G$

2) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in G$

3) $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in G$

a) Să se demonstreze că dacă $x \in G$, atunci $x^{-1} \in G$.

b) Să se calculeze $b \cdot a \cdot b$ și $a^{-1} \cdot b$.

c) Să se demonstreze că $G = S_4$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu.