Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Galați - 7 februarie 2026
Clasa a X -a

Problema 1

Demonstrați că:

a) numărul $\frac{log_2 24}{log_{96} 2} - \frac{log_2 192}{log_{12} 2}$ este întreg;

b) $log_{ab} c = \frac{log_a c \cdot log_b c}{log_a c + log_b c}, \forall a, b, c > 1.$

Supliment GM nr.10/2025

Problema 2

a) Dacă n este un număr natural nenul, demonstrați că

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

b) Determinați partea întreagă a numărului

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2025}}.$$

Problema 3

a) Fie ε o rădăcină de ordinul trei a unității, $\varepsilon \neq 1$, și numărul complex $z = (1+\varepsilon) \cdot (1+\varepsilon^2) \cdot \ldots \cdot (1+\varepsilon^{2026})$. Determinați $|z|$ și arg z.

b) Să se determine funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ știind că: $f(x) + f(\omega x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, unde ω este o rădacină cubică nereală a unității.

Problema 4

a) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - 4[x] + [2x]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a. Să se calculeze $(f \circ f)(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Fie $a > 0$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care verifică relația $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrați că funcția f este periodică.

Notă: *Timp de lucru: 3 ore.*
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 21 puncte.
Se acordă 16 puncte din oficiu.